



DESENVOLVIMENTO DE MODELO *FUZZY* DE DBO – OD PARA ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA CONCENTRAÇÃO EM RIOS

*Priscila Araújo Barbosa Parente*¹; *Juliana Alencar Firmo de Araújo*²; *Sílvia Helena Santos*³; *Tician Fontoura Vidal*⁴ & *Raimundo Oliveira de Souza*⁵

RESUMO – Este estudo trata do desenvolvimento de uma metodologia, com base nas equações diferenciais de transporte de massa, na forma *fuzzy*, aplicadas em rios para determinar as concentrações de Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO) e de Oxigênio Dissolvido (OD) nas formas de funções de pertinência. O estudo permite determinar regiões com maiores e menores graus de incertezas, a partir da solução das equações diferenciais *fuzzy* para a DBO e para o OD. Considerando as características do modelo usado, os resultados mostraram que esta metodologia desenvolvida quando bem aplicada pode ser determinante na avaliação da confiabilidade em rios sujeito a lançamentos de efluentes.

ABSTRACT – This present work aimed at developing a methodology based on fuzzy differential equations of mass transport applied in rivers to determine the Biochemical Oxygen Demand (BOD) and Dissolved Oxygen (DO) concentrations as membership functions. This study determines regions of greater and lesser degrees of uncertainty from the solution of differential equations of the BOD and DO models. Considering the characteristics of the used model, the results showed that the developed methodology when properly applied could be a determining factor in the assessment of reliability in rivers subject to effluent discharges.

Palavras-Chave – Teoria *Fuzzy*; Transporte de Massa; Qualidade de água.

1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

- 1 Mestre em Saneamento Ambiental pela Universidade Federal do Ceará e bolsista da FUNCAP. Campus do Pici, CEP- 60445-760, Bloco 713, Fortaleza – Ceará, Brasil, e-mail: prihparente@gmail.com;
- 2 Doutoranda em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará e bolsista da CAPES. Campus do Pici, CEP- 60445-760, Bloco 713, Fortaleza – Ceará, Brasil, e-mail: [judiaraujo@yahoo.com.br](mailto:juliaraujo@yahoo.com.br);
- 3 Doutora em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará. Campus do Pici, CEP- 60445-760, Bloco 713, Fortaleza – Ceará, Brasil, e-mail: silviahlsantos@hotmail.com;
- 4 Doutoranda em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará. Campus do Pici, CEP- 60445-760, Bloco 713, Fortaleza – Ceará, Brasil, e-mail: ticianafvidal@yahoo.com.br;
- 5 Professor do Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental. Campus do Pici, Centro de Tecnologia, Bloco 713, Fortaleza – Ceará, Brasil, CEP 60445-760, fone: (85) 3366. 9771, e-mail: rsouza@ufc.br.



O oxigênio consumido pelas bactérias durante a decomposição da matéria orgânica é expresso por um parâmetro denominado Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO). Este é um parâmetro determinado em laboratório e indica que quanto maior a quantidade de matéria orgânica lançada no meio maior a quantidade de oxigênio a ser utilizada pelos microrganismos, ou seja, maior a DBO. De acordo com a capacidade de autodepuração de um corpo hídrico os teores de oxigênio dissolvido, após o déficit inicial, podem voltar a se recuperar.

Esse fenômeno de depuração da carga orgânica tem sido detalhadamente estudado e representa uma importante ferramenta nos trabalhos de controle de poluição dos recursos hídricos. Após receber uma carga poluidora de característica predominantemente orgânica, o estudo do comportamento de um corpo receptor vai indicar as medidas a serem tomadas visando compatibilizar o seu lançamento com a capacidade do manancial de recebê-la, de modo que sejam mantidas as condições necessárias à sobrevivência dos organismos aquáticos e sejam garantidos os usos previamente estabelecidos para a água.

Através dos estudos de qualidade de água é possível avaliar o comportamento de um campo de concentração em um sistema hídrico após o lançamento de uma carga poluente. Para tal, deve-se entender os fenômenos físicos, químicos e biológicos responsáveis pelo movimento e dispersão dos contaminantes nesse sistema. Os fenômenos físicos relacionados com a hidrologia são regidos por leis fundamentais da física, tais como: conservação de massa, leis da dinâmica newtoniana, e leis da termodinâmica. Quando aplicadas a meios contínuos, essas leis são representadas por equações diferenciais parciais assumindo diferentes formas, de acordo com o fenômeno a ser estudado (DIAS, 2003).

Este trabalho teve como objetivo desenvolver uma metodologia com base nos processos de transporte de massa utilizando um modelo matemático combinado com a teoria *fuzzy*. Foi feito um estudo do comportamento dos campos de concentrações da DBO e OD, em forma de funções de pertinência, de modo a caracterizar regiões de incertezas nestes campos. Os resultados mostram que esta combinação pode se tornar uma importante ferramenta na determinação dos diferentes níveis de confiabilidade nos corpos hídricos sujeitos a lançamentos de efluentes.

2 - METODOLOGIA

O estudo desenvolvido requisitou a combinação de um conjunto de teorias convenientemente aplicadas de tal modo que todos os objetivos propostos na pesquisa fossem alcançados. Assim, a metodologia proposta tem como princípio básico a determinação do comportamento do campo de concentração no rio natural obtido a partir da solução da equação diferencial *fuzzy* da difusão advectiva. Neste processo é usado um esquema numérico implícito com base no método das diferenças finitas. Este campo de concentração serve para avaliar o grau de incerteza presente na solução dos modelos. Para o cálculo do campo de concentração foram utilizadas as formulações do balanço de massa aplicada em rios para as concentrações de DBO e OD.

2.1 - Modelos do balanço de DBO e OD.

O modelo do balanço de OD em um corpo hídrico foi definido através das equações abaixo.

2.1.1 - Equação de DBO:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + u \frac{\partial L}{\partial x} + L \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial L}{\partial x} \right) - k_R L + S_D \quad (1)$$

2.1.2 - Equação de OD:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{A} \left(AE \frac{\partial C}{\partial x} \right) - k_R C + k_A (C_S - C) \quad (2)$$

Onde:

- L – Concentração da DBO (mg/l);
- t – Tempo (s);
- u – Velocidade longitudinal do escoamento (m/s);
- x – Distância (m);
- E – Coeficiente de dispersão longitudinal (m^2/s);
- k_R – Coeficiente de desoxigenação (s^{-1});
- S_D – Taxa de lançamento difuso, se houver ($mg/l/s$);
- K_A – Coeficiente de reaeração (s^{-1});
- C – Concentração de OD (mg/l);
- C_S – Concentração de saturação do oxigênio saturado (mg/l);
- A – Área da seção transversal do rio considerado (m^2).

A concentração de saturação do OD pode ser calculada pela expressão (THOMANN, 1986):

$$C_S = \exp(z) \quad (3)$$

Onde z é definido por:

$$z = -139,34411 + \frac{1,575701 \times 10^5}{T} - \frac{6,642308 \times 10^7}{T^2} + \frac{1,2438 \times 10^{10}}{T^3} - \frac{8,621949 \times 10^{11}}{T^4} \quad (4)$$

com T sendo a temperatura da água, em graus Kelvin.

2.2 - Teoria fuzzy.

O conceito central da teoria *fuzzy* é a definição das funções de pertinência que representam numericamente o grau na qual um elemento pertence a um conjunto. No caso da teoria dos conjuntos clássicos, o valor da função de pertinência de cada elemento em um conjunto clássico é 1 para membros (aqueles que certamente pertencem) ou 0 para não-membros (aqueles que não pertencem). Já na teoria *fuzzy*, verifica-se que com o aumento do grau de pertinência de um elemento em um conjunto, o valor da função de pertinência para esse elemento também aumenta dentro do intervalo $[0,1]$ (BOGARDI; DUCKSTEIN, 2002).

Num conjunto *fuzzy* \tilde{X} para cada elemento x pertencente ao conjunto existe uma função de pertinência associada:

$$\tilde{X} = \{(x, \mu_{\tilde{X}}(x)) / x \in X\} \quad (5)$$

Onde $\mu_{\tilde{X}}(x)$ é chamada função de pertinência ou grau de pertinência h de x em \tilde{X} . O valor máximo da função de pertinência é $h = 1$, neste caso o conjunto é dito normal ou normalizado.

Aplicando a teoria *fuzzy* ao conjunto de equações da seção 2.1, os parâmetros passam a ser considerados como números *fuzzy*, e as novas equações se transformam em (CHAGAS, 2005):

2.2.1 - Equação de DBO fuzzificada:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} + \tilde{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{A} \tilde{E} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right) - \tilde{k}_R \tilde{L} + \tilde{S}_D \quad (6)$$

2.2.2 - Equação de OD fuzzificada:

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \tilde{C} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{A}} \left(\tilde{A} \tilde{E} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) - \tilde{k}_R \tilde{C} + \tilde{k}_A (\tilde{C}_S - \tilde{C}) \quad (7)$$

Onde \tilde{f} representa funções de pertinências.

Neste conjunto de equações, os parâmetros e as concentrações de DBO e de OD são definidos e calculados como funções de pertinências.

2.2.3 - Função de pertinência para condição de contorno:

Nesta pesquisa as funções de pertinência são funções triangulares definidas por:

$$\mu_c = \frac{C - C_L}{C_m - C_L}, \text{ para } C_L \leq C \leq C_m \quad (8)$$

$$\mu_{c_o} = \frac{C - C_u}{C_m - C_u}, \text{ para } C_m \leq C \leq C_u \quad (9)$$

Onde:

C_L – Concentração no limite esquerdo com menor pertinência (adotado $C_L = 0,75 \text{ mg/L}$);

C_m – Concentração central com maior pertinência (adotado $C_m = 1,25 \text{ mg/L}$);

C_u – Concentração no limite direito com menor pertinência (adotado $C_u = 0,75 \text{ mg/L}$).

3 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para esta pesquisa foram usados dados de um rio de 20 m de largura, declividade de fundo de 0,0005 m/m; rugosidade de 0,01. Admitindo um lançamento na origem de 500 mg/L, e uma condição inicial para a DBO de 2 mg/L e uma vazão de 20 m³/s temos:

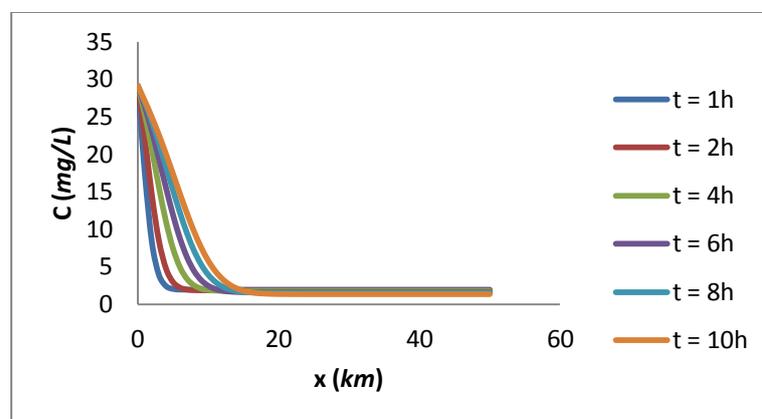


Figura 1. Perfil de concentração de DBO para diferentes tempos com o maior grau de pertinência ao longo do rio.

A figura 1 mostra os perfis de concentração de DBO para diferentes tempos de acordo com a proposta de um modelo transiente para o campo de concentração. Considerando que a fonte de lançamento contínua, há uma propagação dos campos de concentração rio abaixo que segue o padrão de uma função exponencial de acordo com os modelos cinéticos de primeira ordem.

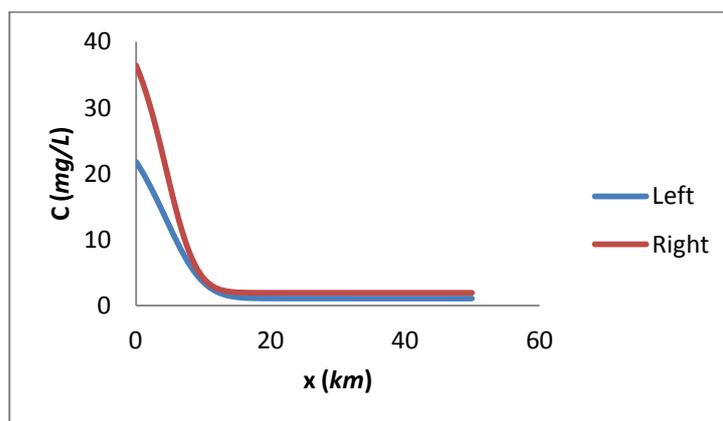


Figura 2. Corte α para os perfis de BBO como função da distância para um tempo de 8 horas.

A figura 2 mostra a distribuição da concentração de DBO com a distância para um nível de pertinência (α) igual a 0,5. Isto quer dizer que entre os dois níveis de pertinência se encontram os possíveis valores de concentração com maior grau de pertinência, ou seja, nesta região se encontram possíveis valores de concentração de DBO com maiores possibilidades de ocorrência. É importante notar que esta região se estreita a partir de 10 km, mostrando assim que segundo a teoria fuzzy as incertezas diminuem bastante após esta seção do rio.

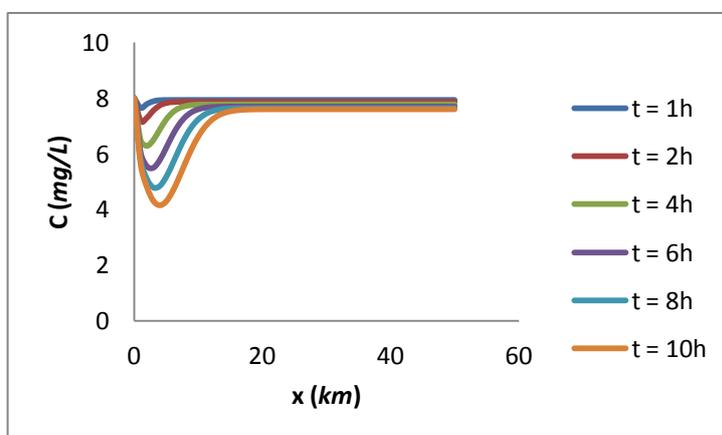


Figura 3. Perfil de concentração de OD com maior grau de pertinência para diferentes tempos.

A figura 3 mostra os perfis de concentração de OD com o maior grau de pertinência para diferentes tempos. Como pode ser observado, como o lançamento de DBO é contínuo ao longo do tempo há uma tendência de que com o passar do tempo as concentrações de OD caíam bastante fazendo com que a situação das águas deste rio se torne bastante crítica.

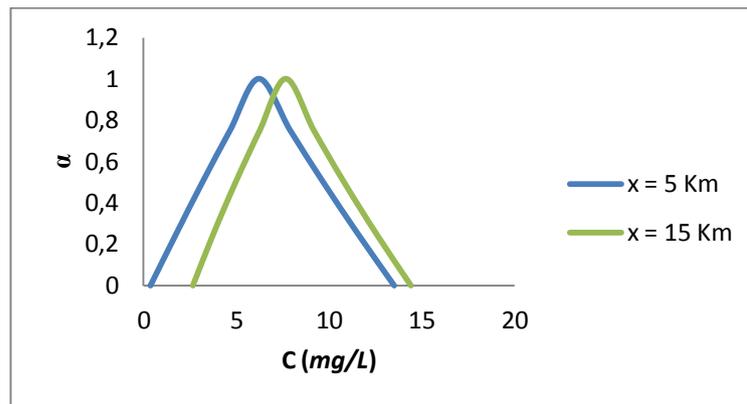


Figura 4. Funções de pertinência para a concentração de OD em diferentes seções do rio para um tempo de 6 horas.

A figura 4 mostra as concentrações de OD em forma de funções de pertinência obtidas da solução das equações diferenciais *fuzzys* para duas seções do canal 6 horas após o início do lançamento. Estas funções são dinâmicas ao longo do canal se movimentando de acordo com as condições da qualidade das águas do mesmo. É possível verificar os diferentes níveis de pertinência para a concentração. Esta característica diferencia a teoria *fuzzy* das demais teorias. Neste caso, cada elemento do conjunto fuzzy tem uma hierarquia ou uma representatividade no contexto do problema.

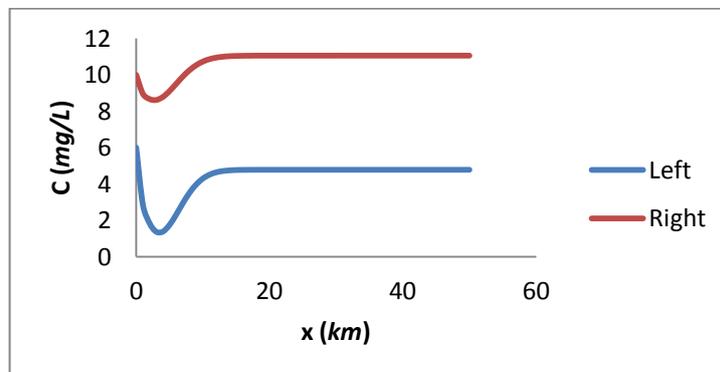


Figura 5. Corte α para o conjunto *fuzzy* da concentração de OD para 9 horas em função da distância.

A figura 5 mostra o conjunto *fuzzy* para um nível de pertinência igual a 0,5 tomados 8 horas do início do lançamento. Diferentemente da DBO, pode-se verificar com clareza a região entre os



dois níveis de pertinência. Há uma região bem definida onde os valores do campo de concentração de OD possuem um grau de pertinência acima de 0,5. Isto quer dizer que entre essas duas linhas se encontram uma região onde há maior possibilidade de ocorrência de valores para o campo de concentração. Também é possível verificar que há uma maior incerteza presente no cálculo da OD do que para o cálculo da DBO. Este resultado mostra a importância da aplicação da teoria *fuzzy* em problemas da engenharia ambiental para a determinação da confiabilidade de sistemas aquáticos quando sujeitos a lançamentos de agentes poluentes.

4 - CONCLUSÕES

Após análise dos resultados, foi possível concluir que a metodologia usada respondeu consistentemente com as futuras expectativas de aplicação da teoria *fuzzy* para a determinação de campos de risco e de confiabilidade em rios naturais sujeitos a lançamentos de efluentes.

Os resultados mostram que o modelo desenvolvido permite que campos de concentração possam ser calculados na sua forma *fuzzy*, mostrando assim diferentes níveis de pertinência para este campo. Os resultados ainda mostraram que é possível estabelecer e quantificar as incertezas presentes em dados e nos diferentes cálculos das equações diferenciais, permitindo assim que seja desenvolvidas sub rotinas capazes de quantificar os níveis de confiabilidade dos corpos hídricos.

AGRADECIMENTOS - Nossos agradecimentos à CAPES, CNPq e FUNCAP pelo suporte financeiro através de bolsa de estudo permitindo o desenvolvimento dessa pesquisa. Em especial ao DEHA/UFC pela contribuição acadêmica.

BIBLIOGRAFIA

- BOGARDI, I., DUCKSTEIN, L. *The Fuzzy Logic paradigm of Risk Analysis*. In: RISK-BASED DECISION MAKING IN WATER RESOURCES X. Santa Barbara, California. **Proceedings...**New York, NY: ASCE, p. 12-22, 2002.
- CHAPRA, S. C. *“Surface Water-Quality Modeling”*. New York: McGraw-Hill, 1997, 844p.
- DIAS, N. L. *“Obtenção de uma Solução Analítica da Equação de Difusão-Advecção com decaimento de 1ª ordem pelo Método da Transformação de Similaridade Generalizada”*. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 8, n.1, p. 181-188, 2003.
- GANOULIS, J. G. *“Engineering Risk Analysis of Water Pollution: Probabilities and Fuzzy sets”*. VCH publishers Inc. – Weinheim; New York; Basel; Cambridge; Tokyo: 1994.



JAMES, A. “*An Introduction to Water Quality Modelling*”. 2nd Edition. By John Wiley & Sons Ltd, 1993, 311p.

THOMANN, R. V.; MUELLER, J. A. “*Principles of Surface Water Quality Modelling and Control*”. Harper & Row, Publishers, New York, 1987.