



## APLICAÇÃO DA TEORIA *FUZZY* NAS EQUAÇÕES DE STREETER-PHELPS PARA AVALIAR O COMPORTAMENTO DA DBO, DÉFICIT DE OD, E OD EM RIOS QUE RECEBEM FONTES PONTUAIS DE LANÇAMENTO

*Raquel Jucá de Moraes Sales*<sup>1\*</sup> *Juliana Alencar Firmo de Araújo*<sup>2</sup>; *Silvia Helena Santos*<sup>3</sup> *Patrícia Freire Chagas*<sup>4</sup> & *Rejane Felix Pereira*<sup>5</sup>

**RESUMO** – Neste estudo, foi desenvolvido um modelo matemático aplicado às equações completas de Streeter-Phelps utilizando a Teoria dos números Fuzzy, a fim de analisar o comportamento das variáveis de controle DBO, OD e déficit de OD, em um curso d'água que recebe agentes poluentes de fontes pontuais de lançamento. De acordo com os resultados, observou-se que a quantidade de carga lançada tem influência no tempo de diluição desta massa no sistema, de forma que, para maiores valores de lançamento, o tempo de diluição é menor, favorecendo os processos de decaimento e formação da camada bentônica. O modelo, desenvolvido como proposta de facilitar a tomada de decisão no controle de lançamento de efluentes em rios, mostrou-se uma alternativa viável e de valor prático de análise, já que os objetivos foram alcançados.

**ABSTRACT**– In this study, a mathematical model, applied to the full Streeter-Phelps equations, using the Fuzzy Set Theory, in order to analyze the behavior of the control variables concern with the Streeter Phelps model, in a stream receiving pollutants concentrations from point sources release, was developed. According to the results, it was observed that the amount of charge released influences the time of the pollutant mass dilution in the system, so that for higher release values, the dilution time is lower favoring the decay processes and the benthic layer formation. The model developed as a proposal to facilitate the decision making in the effluent discharge control into rivers proved to be a viable and practical analytical alternative, since the goals were achieved.

**Palavras-Chave** – Modelo de Streeter-Phelps; Teoria *Fuzzy*; Qualidade de água.

1\* Doutora em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará e bolsista PNPd-CAPES. Campus do Pici, CEP- 60445-760. Bloco 713. Fortaleza – Ceará. e-mail: [raqueljuca@gmail.com](mailto:raqueljuca@gmail.com);

2 Mestre e doutoranda em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará e bolsista CAPES. Campus do Pici, CEP- 60445-760. Bloco 713. Fortaleza – Ceará. e-mail: [judiaraujo@yahoo.com.br](mailto:juliaraujo@yahoo.com.br);

3 Doutora em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará. Campus do Pici, CEP- 60445-760. Bloco 713. Fortaleza – Ceará. e-mail: [silviahlsantos@hotmail.com](mailto:silviahlsantos@hotmail.com);

4 Doutora em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará e bolsista PNPd-CAPES. Campus do Pici, CEP- 60445-760. Bloco 713. Fortaleza – Ceará. e-mail: [pfchagas@yahoo.com](mailto:pfchagas@yahoo.com);

5 Mestre e doutoranda em Recursos Hídricos pela Universidade Federal do Ceará. Campus do Pici, CEP- 60445-760. Bloco 713. Fortaleza – Ceará. e-mail: [rejanefp@gmail.com](mailto:rejanefp@gmail.com).

## 1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Estudos que versam sobre a mecânica de rios e qualidade de água vêm inserindo a modelagem matemática como ferramenta facilitadora de tomada de decisão. Os modelos matemáticos são capazes de englobar diferentes processos físicos, químicos e biológicos envolvidos no sistema de forma prática, mesmo que estes processos sejam complexos e de difícil resolução matemática. Estes modelos, por sua vez, partem fundamentalmente da Teoria de Transporte de Massas, onde são estabelecidas as famosas equações de Streeter-Phelps.

Pelas equações de Streeter-Phelps, pode-se calcular a concentração de DBO (Demanda Bioquímica de Oxigênio), o déficit de OD (Oxigênio Dissolvido), e a concentração de OD presente na água. Uma vez definidas estas variáveis de controle, é possível entender os principais processos que permeiam um sistema hídrico, bem como fazer a análise dos parâmetros físicos, químicos e biológicos envolvidos nas equações.

Entretanto, cada parâmetro necessita de grandes séries de dados monitorados, para que o modelo seja calibrado de maneira eficiente. Na tentativa de solucionar estes entraves, a proposta da Teoria *Fuzzy* se torna cada vez mais atraente, já que a lógica *fuzzy* facilita a análise dos resultados sem que haja a necessidade de significativos bancos de dados.

Maksimovic e Makropoulos (2002), por exemplo, propuseram um sistema integrado de modelagem que considera um sistema hidrológico distribuído, a poluição em modelos de simulação de transporte, indicadores de saúde, Teoria *Fuzzy*, e SIG para a análise de efeitos da poluição difusa no Mar Negro; Huang e Chang (2003) mostraram que existem interações dinâmicas entre cargas de poluentes de um corpo hídrico, associado a uma variedade de incertezas; Mujumdar e Subba (2004) desenvolveram um modelo de carga difusa; Lee e Chang (2005) empregaram uma abordagem interativa *fuzzy* para desenvolver um plano de gestão de qualidade de água em uma bacia hidrográfica; estas e outras pesquisas tem avançado o estudo dos recursos hídricos, já que pesquisas nesta área do conhecimento científico ainda são muito recentes.

### 1.1 Teoria *Fuzzy*

Por ser um método que facilita a análise de incertezas, e ainda por ser apropriada em situações em que não se pode utilizar funções de probabilidade, a Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* vem se tornando uma alternativa atraente (QIN et. al, 2007).

O conceito principal da teoria dos números *Fuzzy* se baseia na existência de uma função de pertinência que representa, numericamente, o grau pelo qual determinado elemento pertence a um conjunto (GANOULIS et. al, 1991).

Tem-se por conjunto *fuzzy* o conjunto de pares ordenados, cujo primeiro elemento é  $x$ , estando inserido no conjunto universo  $X$  (conjunto base), e o segundo é a função de pertinência  $\tilde{A}$ , dada pela Equação 1. A representação matemática do conjunto *fuzzy* é definida pela Equação 2, sendo  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  a representação do grau com que  $x \in A$ .

$$\mu_{\tilde{A}: X} \rightarrow [0,1] \quad (1)$$

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]\} \quad (2)$$

Existem diferentes tipos de funções de pertinência parametrizadas, dentre elas, as mais utilizadas são as triangulares, Equação 3, e as trapezoidais. Neste estudo, optou-se por utilizar a função de pertinência do tipo triangular.

*Função Triangular:*

$$\text{trimf}(x, a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \quad (3)$$

## 2. METODOLOGIA

Este estudo trata da aplicação da Teoria *Fuzzy* nas equações de Streeter-Phelps para avaliar o comportamento da DBO, déficit de OD, e OD em rios que recebem fontes pontuais de lançamento. Para atingir estes objetivos, foi desenvolvido um modelo matemático, fundamentado a partir das equações de Streeter-Phelps, transformadas as equações do modelo para a sua forma *fuzzy*, e desenvolvido um programa computacional que permite a realização de simulações sob diferentes cenários de lançamentos de efluentes.

### 2.1 Formulação do modelo de Streeter-Phelps para fontes pontuais

As equações de Streeter-Phelps consideram os principais fenômenos da mecânica dos rios, que engloba os processos de autodepuração e balanço de OD, reações cinéticas das substâncias poluentes, e considera o sistema em seu estado estacionário, ou permanente, o que permite estabelecer as equações de DBO, OD e Déficit de OD, ao longo das seções longitudinais (THOMANN, 1989). Estas equações são dadas, matematicamente, da seguinte maneira:

*Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO):*

A Equação 4 representa a DBO para uma carga pontual lançada no rio.

$$\frac{dL}{dt} = -k_r L \quad (4)$$

$k_r$  é a constante de remoção da DBO no rio [ $T^{-1}$ ]. Deve-se lembrar que  $k_r = k_d + k_s$ , sendo:  $k_d$  o coeficiente de decaimento [ $T^{-1}$ ]; e  $k_s$  o coeficiente de sedimentação [ $T^{-1}$ ].

*Déficit de Oxigênio Dissolvido (Déficit de OD):*

A Equação 5 representa o déficit de OD para uma carga pontual lançada no rio.

$$\frac{dD}{dt} = -k_a D + k_d \cdot L \quad (5)$$

$D$  é o déficit de oxigênio [ $ML^{-3}$ ] e  $k_a$  é o coeficiente de aeração [ $T^{-1}$ ];

O cálculo do oxigênio dissolvido é dado pela diferença entre o oxigênio saturado presente no rio e o déficit de oxigênio. Assim sendo, tem-se a seguinte configuração matemática para o oxigênio dissolvido, Equação 6.

*Oxigênio dissolvido (OD):*

$$\frac{dC}{dt} = -k_d L + k_a (C_s - C) \quad (6)$$

$C$  representa a concentração de oxigênio [ $ML^{-3}$ ] e  $C_s$  representa a concentração de oxigênio saturado [ $ML^{-3}$ ].

A concentração de saturação do Oxigênio Dissolvido ( $C_s$ ) é calculada a partir da seguinte expressão matemática, Equação 7, Thomann (1989):

$$C_s = \exp(z) \quad (7)$$

Para  $z$  igual a, Equação 8:

$$z = -139,34411 + \frac{1,575701 \cdot 10^5}{T} - \frac{6,642308 \cdot 10^7}{T^2} + \frac{1,2438 \cdot 10^{10}}{T^3} - \frac{8,621949 \cdot 10^{11}}{T^4} \quad (8)$$

Em que  $T$  é a temperatura, em [ $^{\circ}K$ ].

## 2.2 Solução do modelo de Streeter-Phelps para fontes pontuais

As soluções “analíticas” do modelo são dadas por Thomann (1989), sendo elas:

*Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO):*

$$L = L_0 e^{-k_r \frac{x}{U}} \quad (9)$$

$L_0$  é dado por  $\frac{Q_r \cdot C_r + Q_w \cdot C_w}{Q_r + Q_w}$  sendo,  $Q_r$  a vazão do rio [ $L^3 T^{-1}$ ];  $C_r$  a concentração de DBO no rio [ $ML^{-3}$ ];  $Q_w$  a vazão do efluente [ $L^3 T^{-1}$ ]; e  $C_w$  a concentração de DBO do efluente [ $ML^{-3}$ ].

*Déficit de Oxigênio Dissolvido (Déficit de OD):*

$$D = \frac{k_a \cdot L_0}{k_a - k_r} \cdot \left( e^{-k_r \frac{x}{U}} - e^{-k_a \frac{x}{U}} \right) + D_0 e^{-k_a \frac{x}{U}} \quad (10)$$

*Oxigênio dissolvido (OD):*

As concentrações de oxigênio dissolvido são encontradas subtraindo-se todo o oxigênio presente na água, chamado de oxigênio saturado, pelo déficit de oxigênio calculado a partir da Equação 10. Matematicamente, fica sendo, Equação 11:

$$C = C_s - D \quad (11)$$

## 2.3 Fuzzificação do modelo de Streeter-Phelps para fontes pontuais

Para que um dado quantitativo se transforme em um conjunto *fuzzy*, é necessário que seja delimitado um intervalo fechado, com limites inferiores e superiores conhecidos. No caso do modelo de qualidade de água, cada parâmetro do modelo deverá ser transformado em uma função de pertinência, com intervalos de confiança bem definidos, para que o modelo tenha características *fuzzy*. Sendo assim, para cada variável de controle, as equações do modelo são representadas na sua forma *fuzzy* como:

*Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO):*

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0 e^{-\tilde{k}_r \frac{x}{U}} \quad (12)$$

*Déficit de Oxigênio Dissolvido (Déficit de OD):*

$$\tilde{D} = \frac{\tilde{k}_a \cdot \tilde{L}_0}{\tilde{k}_a - \tilde{k}_r} \cdot \left( e^{-\tilde{k}_r \frac{x}{\tilde{U}}} - e^{-\tilde{k}_a \frac{x}{\tilde{U}}} \right) + \tilde{D}_0 e^{-\tilde{k}_a \frac{x}{\tilde{U}}} \quad (13)$$

*Oxigênio dissolvido (OD):*

$$\tilde{O}D = \tilde{C}_s - \tilde{D} \quad (14)$$

## 2.4 Composição das funções de pertinência

Nesta pesquisa, optou-se por utilizar a distribuição *fuzzy* triangular, onde foram estimados os valores mínimo, médio e máximo de cada parâmetro “fuzzificado”, conforme o fator de variância estabelecido em outras literaturas. Cada função de pertinência é calculada de maneira que seus extremos, valores mínimo, médio e máximo, sejam estabelecidos de forma arbitrária, ou obedecendo a alguma lógica de desvio padrão. Neste estudo, foram utilizados valores de desvio padrão de 25% em que, definido o valor médio do número de base, os extremos são calculados. Assim, para o valor mínimo, o cálculo é de 0,75 do valor médio estabelecido, e o valor máximo é de 1,25. Exemplificando, tem-se a função de pertinência correspondente ao coeficiente de decaimento.

Tabela 2 – Funções de pertinência correspondentes a parâmetro de coeficiente de decaimento.

$$\mu_{k_d} = \frac{k_d - k_{dL}}{k_{dM} - k_{dL}}, \text{ para } k_{dL} \leq k_d \leq k_{dM} \quad (15)$$

$$\mu_{k_d} = \frac{k_d - k_{dU}}{k_{dM} - k_{dU}}, \text{ para } k_{dM} \leq k_d \leq k_{dU} \quad (16)$$

## 2.5 Programa Computacional

Um programa computacional foi desenvolvido no intuito de encontrar as respostas do modelo matemático desenvolvido em linguagem FORTRAN. O programa permite a avaliação das variáveis de controle, na forma de função de pertinência, através da metodologia *fuzzy*. Foram estabelecidas subrotinas com funções bem definidas:

- Leitura dos dados de entrada: desenvolvida para se fazer a leitura de todos os dados referentes aos parâmetros do modelo, bem como os dados inseridos no cálculo das condições iniciais e de contorno.
- Fuzzificação do modelo: responsável pela “fuzzificação” dos parâmetros do modelo, transformando dados numéricos em distribuições *fuzzy*.

- Impressão dos resultados: responsável por imprimir os resultados do modelo tais como as concentrações de DBO e de OD ao longo do curso do rio, em função do tempo, o déficit de oxigênio ao longo do tempo.

## 2.6 Dados para as simulações

O cenário trata da análise da concentração de DBO, déficit de OD e concentração de OD para diferentes tipos de lançamento na seção de origem de um rio qualquer. Os dados do rio foram arbitrários, uma vez que o propósito é a análise da adição de diferentes fontes pontuais de lançamento. Sendo assim, para este caso, a carga de DBO do efluente de uma fonte pontual variou em 100, 300 e 500 mg/L.

Nestas simulações, foram consideradas ainda uma fonte difusa, proveniente do efeito do sedimento, de [0,7; 0,9; 1,1] mg/L e uma fonte difusa, correspondente de entradas laterais, de [1,5; 2,00; 2,5] mg/L, nas suas formas *fuzzy*, cujos valores médios tem o maior grau de pertinência. Os dados da simulação podem ser observados na Tabela 5.

Tabela 5 – Dados dos parâmetros utilizados na simulação do cenário.

Parâmetros		Un.
Vazão média do efluente (fonte pontual)	40.000,00	m <sup>3</sup> d <sup>-1</sup>
Concentração de OD do efluente (fonte pontual)	1,00	mg/L
Largura média do rio	20,00	m
Vazão média do rio	400.000,00	m <sup>3</sup> .d <sup>-1</sup>
Profundidade média do rio	3,00	m
Comprimento do rio	50.000,00	m
Concentração de DBO no rio	2,00	mg/L
Concentração de OD no rio	7,50	mg/L
Temperatura média do rio	27	°C
Coeficiente de reaeração	[1,60; 2,10; 2,60]	d <sup>-1</sup>
Coeficiente de decaimento da DBO com a interferência do rio	[0,67; 0,89; 1,11]	d <sup>-1</sup>
Coeficiente de decaimento da DBO sem a interferência do rio	[0,45; 0,60; 0,75]	d <sup>-1</sup>
Limites de DBO permitidas (legislação)	[4; 5; 7]	mg/L

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na primeira simulação, ilustrada pela Figura 1, verifica-se o comportamento da concentração de DBO para diferentes lançamentos na seção de origem do rio. Deve ficar claro que, para todos os gráficos de concentração apresentados, foram considerados os valores com grau de pertinência 1.

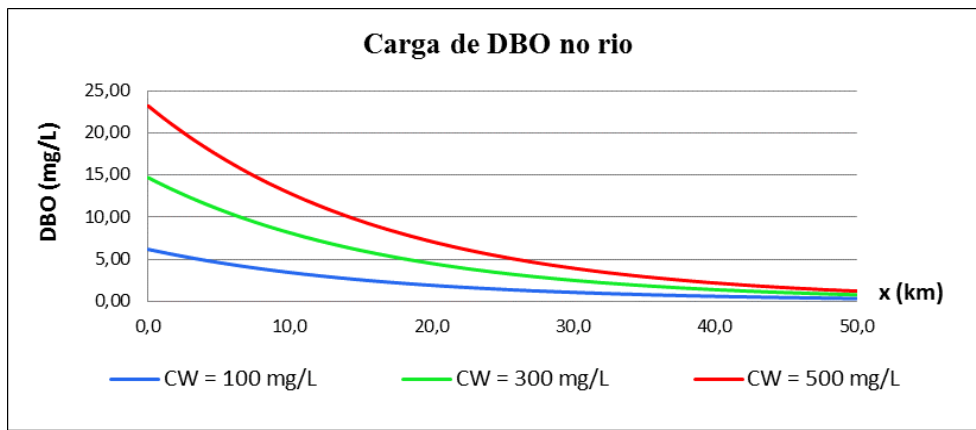


Figura 1 – Comportamento da DBO lançada na seção de origem do rio.

Na Figura 1, é possível ver que quanto maior for a carga de DBO lançada no rio (CW), maior será a distância para que este lançamento se dissipe. Pode-se verificar, portanto, a coerência dos resultados gerados pelo programa, uma vez que quanto maior for a massa distribuída, maior o tempo de diluição desta massa no fluido.

O mesmo ocorre ao analisar o déficit de OD, Figura 2. Nesta figura, pode-se ver o aumento do déficit de oxigênio dissolvido no início do lançamento, chegando a valores máximos próximo da seção a 10 km da seção de origem do rio. Conforme a carga de DBO vai se dissipando, os valores de déficit voltam a ser os mesmos que aqueles antes do lançamento. Em outras palavras, ocorre a diluição da nuvem poluente ao longo do rio, de maneira que a distribuição da concentração de DBO atinja a uniformidade.

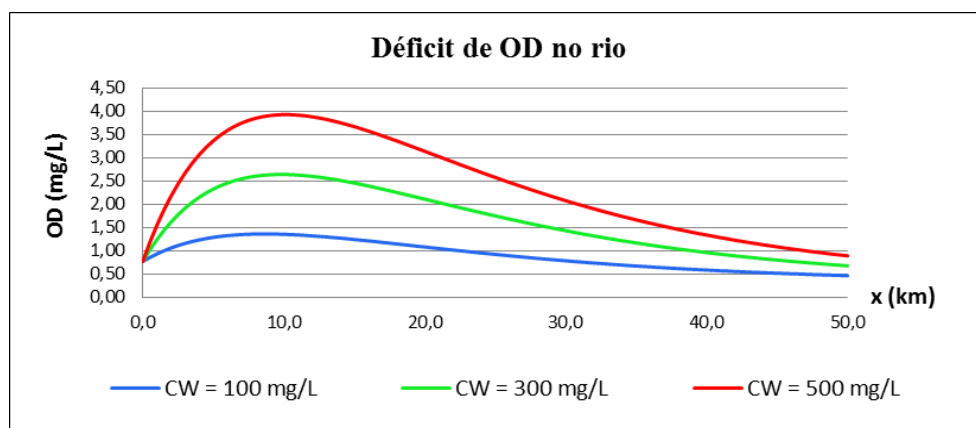


Figura 2 – Comportamento do déficit de OD após o lançamento da carga de DBO.

O déficit de OD pode ser visualizado na sua forma *fuzzy*, Figura 3, cujos valores com grau de pertinência zero são aqueles com menor possibilidade de ocorrência, enquanto que aqueles próximos ao grau de pertinência 1 têm maior possibilidade de ocorrência.



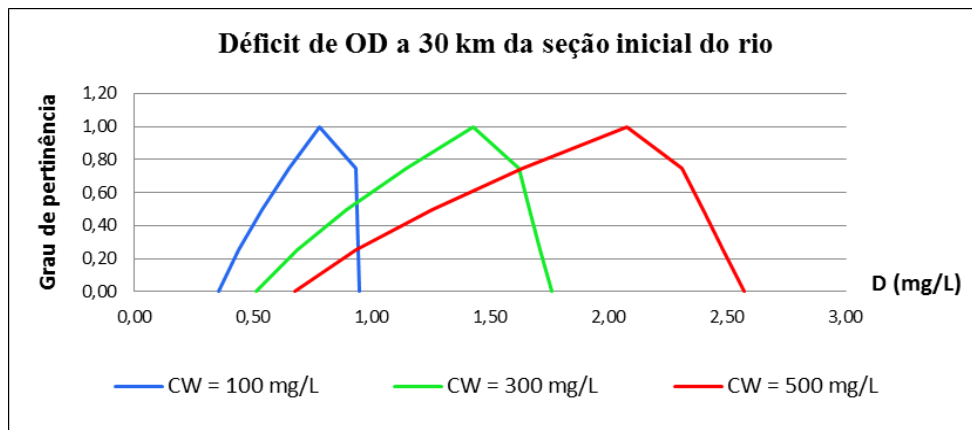


Figura 3 – Déficit de OD após o lançamento da carga de DBO, na sua forma *fuzzy*, a 30 km da seção de origem do rio.

A análise seguinte, Figura 4, estuda o comportamento da concentração de OD do rio, para diferentes lançamentos na seção de origem. Considerando que as concentrações de oxigênio dissolvido são calculadas a partir da diferença entre o oxigênio saturado e o déficit de OD, o gráfico gerado representa exatamente o oposto do que ocorre com o déficit. Sendo assim, os valores de concentração de OD são menores na seção a 10 km da seção de origem do rio. Esta seção tem uma especial relevância para as análises de OD por se tratar do ponto crítico da curva de OD, onde ocorre o início da recuperação, ou autodepuração, do rio. A partir deste ponto, o balanço de oxigênio passa a ser positivo.

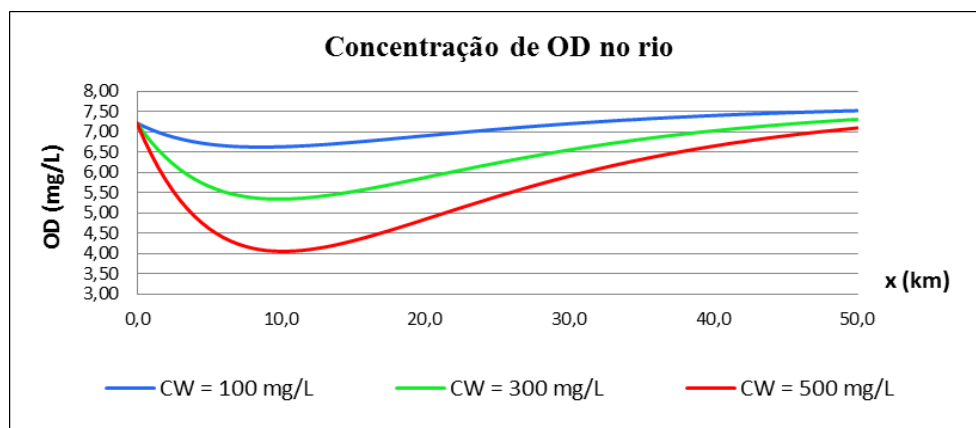


Figura 4 – Comportamento da concentração de OD após o lançamento da carga de DBO.

Pode-se ver também, na Figura 4, que quanto maior for a carga de DBO lançada no rio, menor será a concentração de oxigênio dissolvido. Ou seja, quanto maior a nuvem de poluentes, maior será o consumo de oxigênio dissolvido, ou déficit de oxigênio dissolvido, e menor as concentrações de oxigênio presentes na água. Estes resultados estão em conformidade com o que acontece na mecânica dos rios, o que demonstra a coerência nos resultados esperados e, conseqüentemente, a eficácia do programa desenvolvido.

#### 4. CONCLUSÕES

Os resultados gerados a partir da aplicação do modelo de Streeter-Phelps, para o lançamento de fontes pontuais poluidoras, possibilitaram estabelecer algumas conclusões: Observou-se que esta teoria é eficiente em estudos onde se tem dificuldade de determinar os valores dos parâmetros envolvidos no sistema; os dados do modelo, utilizando esta teoria, são inseridos em forma de nuvem, valores nebulosos, em se tem valores mais prováveis e menos prováveis de ocorrência e, por este motivo, utilizar esta lógica matemática é de grande valor científico e, pelos resultados apresentados, viu-se que é possível serem feitas estas simulações. Em relação a análise do cenário de estudo, verificou-se que a quantidade de carga lançada tem influência no tempo de diluição desta massa no sistema. Assim, para valores maiores de lançamento, menor será o tempo de diluição desta carga no sistema, favorecendo os processos de decaimento e a posterior formação da camada bentônica.

#### BIBLIOGRAFIA

GAHOULIS, J.; DUCKSTEIN, L.; BOGARDI, I. (1991). *Risk Analysis of Water Quantity and Quality Problems: The Engineering Approach*. In: Ganoulis (Ed.), *Water Resources Engineering Risk Assessment*, Nato ASI Series, Serie G: Ecological Sciences, v. 29.

HUANG G.H. & CHANG N.B. (2003). “*The perspectives of environmental informatics and systems analysis*”. *Journal of Environmental Informatics* 1, pp. 1–6.

LEE C.S., CHANG S.P. (2005). “*Interactive fuzzy optimization for an economic and environmental balance in a river system*”, *Water Research* 39, pp. 221–231.

MUJUMDAR P.P. & SUBBA RAO V.V.R. (2004). “*Fuzzy waste load allocation model: a simulation optimization approach*”, *J. Comput. Civil Eng.* 18 (2), pp.120–131.

MAKSIMOVIC C, MAKROPOULOS CK. (2002). “*Integrating river basin management and the coastal zone: the (blue) Danube and the (Black) Sea*”. *Water Sci Technol* 46, pp. 187–94.

QIN X.S., HUANG G.H., ZENG G.M., CHAKMA A., HUANG Y.F. (2007). “*An interval-parameter fuzzy nonlinear optimization model for stream water quality management under uncertainty*”, *European Journal of Operational Research* 180, pp. 1331–1357.

THOMANN R.V. (1989). “*Bioaccumulation model of organic chemical distribution in aquatic food chains*”, *Environ. Sci. Technol.* 18, pp. 67–71.

**AGRADECIMENTOS** Nossos agradecimentos ao CNPq e CAPES, pelo suporte financeiro que permitiu o desenvolvimento desta pesquisa.